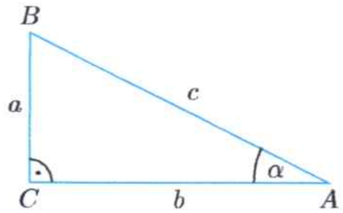
5.4. Związki między funkcjami trygonometrycznymi



Przypomnijmy, że w trójkącie prostokątnym:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

PODSTAWOWE TOŻSAMOŚCI TRYGONOMETRYCZNE

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są zależności:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Tożsamość $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nazywamy **jedynką trygonometryczną**.

Ćwiczenie 1

Udowodnij, że dla dowolnego kąta ostrego α:

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\qquad$ b) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Jeżeli dana jest wartość jednej funkcji trygonometrycznej, to – korzystając z podanych wyżej tożsamości – można wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.

Przykład 1

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Wartość $\cos\alpha$ obliczymy, korzystając z jedynki trygonometrycznej:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego są dodatnie

Obliczamy wartość $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Ćwiczenie 1

W dowodzie jedynki trygonometrycznej korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$

b) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$